



Tanım Aralığının Sınır Değerlerinde Limit

İbrahim Kuşçuoğlu - Eyüp Kamil Yeşilyurt

Alaattin Altuntaş - Mustafa Yağcı

Forumumuzda yapılan limit konulu zümre sırasında, yapılan araştırmalarda farklı kaynaklarda farklı açıklamaların olduğunu göreyerek, konuya doyurucu bir açıklama yapma ve birliktelik sağlama amacıyla bulgularımızı istifadenize sunuyoruz.

1. Giriş

Yazının amacına ulaşması için okurun öncelikle aşağıda verilen ÖSS düzeyindeki 10 soruyu yanıtlaması gerekmektedir. Daha sonra yanıtlarını bizim verdiğimiz cevaplarla kıyaslayarak, farklılık halinde ilgili açıklamaları okuması önerilir.

Tamsayılar kümesi \mathbb{Z} , rasyonel sayılar kümesi \mathbb{Q} , irrasyonel sayılar kümesi \mathbb{Q}' , reel sayılar kümesi \mathbb{R} ve tam değer fonksiyonu $\| \cdot \|$ ile gösterilmiştir.

Soru 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x}$ değeri için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- A) $-\infty$ B) 0 C) 1 D) $+\infty$ E) Yoktur

Soru 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x$ değeri için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- A) $-\infty$ B) 0 C) 1 D) $+\infty$ E) Yoktur

Soru 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\|x\|}$ değeri için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- A) $-\infty$ B) 0 C) 1 D) $+\infty$ E) Yoktur

Soru 4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{\|x\|}$ değeri için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- A) $-\infty$ B) 0 C) 1 D) $+\infty$ E) Yoktur

Soru 5. $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$ değeri için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- A) $-\infty$ B) 0 C) 1 D) $+\infty$ E) Yoktur

Soru 6. $f: \mathbb{Z}^- \cup \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ olmak üzere, $f(x) = x^x$ fonksiyonu veriliyor. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ değeri için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- A) $-\infty$ B) 0 C) -1 D) $+\infty$ E) Yoktur

Soru 7. $f: \{1\} \mapsto \{2\}$ olmak üzere bir $y = f(x)$ fonksiyonu veriliyor. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ değeri için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) $+\infty$ E) Yoktur

Soru 8. $f: \{1, 2, 3\} \mapsto \{2\}$ olmak üzere bir $y = f(x)$ fonksiyonu veriliyor. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ değeri için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Yoktur

Soru 9. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathcal{Q} \\ 1, & x \in (\mathbb{R} - \mathcal{Q}) \end{cases}$

şeklinde tanımlanan bir f fonksiyonun $x = 0$ noktasında limiti nedir?

- A) $-\infty$ B) 0 C) 1 D) $+\infty$ E) Yoktur

Soru 10 $f: [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|$ fonksiyonu veriliyor. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ değeri kaçtır?

- A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) Yoktur

Soruların çoğuna, belki de tümüne göz ucuyla bakıp, gayet kendinizden emin bir şekilde içinizden kendi doğrunuzu söyleyerek bunda tartışılacak ne var ki diye hayıflanmış bile olabilirsiniz. O halde siz bu notu daha iyi okuyun.

Milli Eğitim Bakanlığının ders kitabında doğru ya da yanlış bir bilgi (baskı hatası gibi küçük meseleler hariç) bizler için doğru kabul edilmesi gereken bir bilgidir. Burada söz konusu olan durum tanım ve kabullenmelerle ilgilidir. MEB ders kitabındaki kabullenmeleri (tanımları) biz öğretmenler de kabul etmek durumundayız aksi takdirde birliklikten söz etmek mümkün olmaz ve hiçbir zaman sonuçlanamayacak tartışmalarla birbirimizi yıpratmaktan, öğrencilerimizin kafasını karıştırmaktan başka bir şey yapmış olmayız.

Hepimizin bildiği gibi doğal sayılar kümesi 0, 1, 2, 3, ... gibi sıfırın da dahil edildiği bir kümedir. Oysa üniversite camiasında doğal sayı kümesi denildiğinde sıfırın dahil edilmediğini biliyoruz. ÖSYM soru hazırlarken de MEB müfredatında doğru kabul edilmiş durumları dikkate almaktadır. Diyelim ki ÖSS’de bir matematik sorusu, bilim camiasında kabul edildiği şekilde soruldu ama ders kitabındaki bilgiyle de çelişti, ÖSYM’nin yapacağı ilk şey, söz konusu soruyu iptal etmek olacaktır. En kötü ihtimalle MEB yayınladığı ders kitabının arkasında duracaktır. Bu nedenle ÖSS sorularını yazanlar Milli Eğitim Müfredatını çok iyi bilirler, tartışmaya meydan verebilecek soru tiplerinden kaçınırlar. Aynı hassasiyet, MEB kitabı yazar ve denetleme komisyonunda da olmalıdır. Milli Eğitim Bakanlığı ders kitabı yazarlarının ve inceleme komisyonunun büyük sorumluluğu olduğuna inanıyoruz...

Bir tanım yapılırken, önce genel durum düşünülerek tanım yapılır ve zamanla özel durumlar da gündeme gelmeye başladığında tanımlardaki eksiklikler varsa giderilir veya ilave tanımlar yapılır.

“0 sayısı, doğal sayılar kümesinin elemanı mıdır, değil midir?”

İşte bu bir kabuldür ve sıfır, ister doğal sayı kabul edilsin isterse edilmesin, her iki durumda da matematik o bilgiye göre kendi içinde bir tutarlılık oluşturur. İhtiyaca göre belli bir amaca hizmet edecekse neyi ne şekilde kabul ettiğiniz değil hedefiniz daha önemlidir. Bir tanımın özel bir durumu kapsayıp kapsamadığı açık olarak belli değilse farklı kabullenmeler meydana gelebilir.

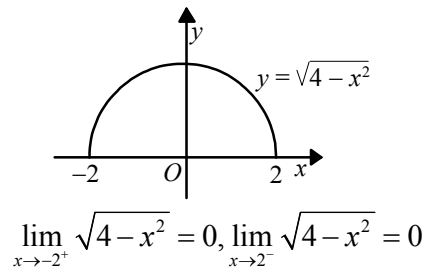
“Limit konusunda bir aralığın sınır noktalarında limit var mıdır, yok mudur?”

Bu soruya verilen farklı cevaplar ve üzerine yapılan tartışmalar MEB kitabındaki tanımla sonlandırılmıştır. Bu tanımlı vermeden önce, bu yazının yazılmasına sebep olan bazı kaynaklardaki bazı bilgileri satırlarımıza taşıyacağız.

2. Farklı tanımlar

Meslektaşlarımız tarafından kaynak kabul edilen ve güvenilirliğine inanılan bazı kitaplarda konuyla ilgili düşünceler, noktasına virgülüne dokunmadan aşağıda verilmiştir:

Calculus / Thomas Finney / 1998 / 9.baskı / Sayfa 79



Fonksiyonun $x = -2$ 'de soldan veya $x = 2$ 'de sağdan bir limiti yoktur. -2 veya 2 'de iki taraflı bir limiti bulunmamaktadır.

Tek taraflı limitlerde Teorem 1'de verilen limit özelliklerinin hepsi bulunur. İki fonksiyonun toplamının sağdan limiti fonksiyonların sağdan limitlerinin toplamı gibi, Sandöviç Teoremi gibi, polinom ve rasyonel fonksiyonların limitleriyle ilgili teoremler de tek taraflı limitler için geçerlidir.

Tek taraflı ve iki taraflı limitler arasındaki bağlantı aşağıdaki teoremlerle verilir (İspatı bu bölümün sonundadır).

Teorem 5.

Tek Taraflı ve İki Taraflı Limitler

x, c 'ye yaklaşırken bir $f(x)$ fonksiyonunun ancak ve ancak o noktada sağdan ve soldan limitleri varsa ve bu limitler eşitse bir limiti vardır.

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L \text{ ve } \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$$

Örnek 2. Şekil 1.27'de gösterilen grafik için verilen aşağıdaki ifadelerden hepsi doğrudur.

$x = 0$ 'da $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$,

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ ve $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ yoktur.

(Fonksiyon $x = 0$ 'ın solunda tanımlı değildir.)

$x = 1$ 'de $f(1) = 1$ olduğu halde $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$ 'dır.

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$ ve $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ yoktur.

(Sağdan ve soldan limitler eşit değildir.)

$x = 2$ 'de $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$,

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$,

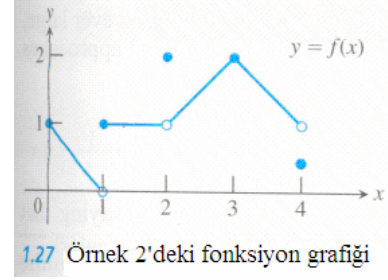
$f(2) = 2$ olduğu halde $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$ 'dir.

$x = 3$ 'de $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2 = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) = 2$,

$x = 4$ 'te $f(4) \neq 1$ olduğu halde $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 1$ 'dir.

$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$ ve $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ yoktur.

(Fonksiyon $x = 4$ 'ün sağında tanımlı değildir.)



$[0, 4]$ 'teki diğer bütün a noktalarında $f(x)$ 'in limiti $f(a)$ 'dır.

Bu kaynak eser sonradan yazılmış birçok Türkçe kaynak esere ilham olmuştur. Tartışma meydana getiren bu durum fark edildiğinde ise değerli matematikçilerimiz sordukları sorunun tartışmasız doğru cevaplanabilmesi için tek taraflı limit (sadece sağ veya sadece sol limit) şeklinde soru sormuşlar ya da sorularında sınır değerleri kullanmamışlardır. Belki de **güvenilirlik** açısından en doğrusu da budur. ÖSYM de geçmiş yıllarda bu durumu içeren soru sormamıştır.

Sayfa 111 / ... Tanım 1. $A \subset \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. a noktasının her δ komşuluğunda A kümesinin a 'dan farklı en az bir elemanı varsa, bu a noktasına **A kümesinin yığılma noktasıdır** denir.

Örnekler

1. $A = \{x = \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ kümesinin yığılma noktası 0 (sıfır) noktasıdır. $0 \notin A$
2. $B = [0, 1]$ kümesinin her elemanı yığılma noktasıdır.
3. \mathbb{N} doğal sayılar kümesinin yığılma noktası yoktur.

Tanım 2. $A \subset \mathbb{R}$ ve $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve a da A kümesinin bir yığılma noktası olsun. Terimleri $A - \{a\}$ kümesine ait olan ve a noktasına yakınsayan her (x_n) dizisi için elde edilen $(f(x_n))$ görüntü dizisi aynı bir l sayısına yakınsıyorsa bu l sayısına f fonksiyonunun a noktasındaki limiti denir ve $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ şeklinde gösterilir.

Bu tanımdan da anlaşılacağı gibi, a limit noktasının A tanım kümesine ait olma zorunluluğu yoktur. Fakat a , mutlaka tanım kümesinin yığılma noktası olmalıdır.

...

Sayfa 115 / ... Sağdan ve soldan limit tanımları ile limit tanımı göz önüne alındığında şu sonuç ifade edilebilir.

Bir f fonksiyonunun bir noktada limitinin var olması için gerek ve yeter şart o noktada sağdan ve soldan limitlerinin mevcut ve eşit olmasıdır. ()*

...

(*) sonucu bilinçli veya bilinçsizce mi böyle yazıldı, bilemeyiz ama bu ifade açık seçik "sağ limit ve sol limit olacak ve üstelik bunlar birbirine eşit olacak" anlamını taşımaktadır. Aksi halde yani sağ limit veya sol limit olacak manası çıkmayacağı ortadadır, çünkü bu durumda 'eşit olacak ifadesi baya bir anlamsız olmaktadır. Ayrıca kitapta sınır değerlerle ilgili bir tek örnek soru-çözüm bulunmamakta, olanlarda da tek taraflı (sağ veya sol) limit sorulmuştur.

Sayfa 221/ ... 2.2.3. Tanım. $A \subset \mathbb{R}$ olsun, $\forall \varepsilon > 0$ için a 'nın ε komşuluğunda A 'nın a 'dan farklı hiç olmazsa bir tane elemanı varsa a 'ya **A 'nın bir limit noktasıdır** denir.

Sayfa 254/ ... Bir f fonksiyonunun a 'da sağdan ve soldan limitleri varken bu limitler eşit ise **f 'nin a 'da limiti vardır** denir.

Bu kitapta dönüşümün sinyalleri artık daha açık görülüyor fakat yine de sınır noktalarda limiti sormaktan çekinildiği aşağıdaki soruyla görülüyor.

Sayfa 262/ ... Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

$$y) \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}$$

MEB Talim ve Terbiye Kurulu onaylı Matematik Ders Kitabı / Prof. Dr. H.Hilmi HACISALİHOĞLU / Serhat yayınları / 2001

Kitapta önemli bir değişiklik göze çarpmıyor, görüntüde değişiklik göze çarpsa da temel içerik aynı ve aynı hassasiyetle tartışılmalı sorulardan kaçınıldığını görüyoruz. Yukarıdaki kitaptan farklı algılanacak şu ifadeyi aynen yazıyoruz:

Sayfa 74 / ... 1. Bir fonksiyonun bir noktada sağdan limiti soldan limitine eşit ise fonksiyonun bu noktada limiti vardır.
2. Bir fonksiyonun bir noktada sağdan limiti soldan limitine eşit değilse, fonksiyonun bu noktada limiti yoktur.

Genel Matematik / Mustafa Balcı / Balcı Yayınları / Cilt 1 / 2. Baskı

Sayfa 87 / ... Eğer f fonksiyonu sadece $[a, b]$ aralığında tanımlı ise x 'in b 'ye yaklaşması sadece soldan mümkün olacağından

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \text{ varsa } \lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$$

olur. Benzer olarak

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \text{ varsa } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

olur.

MEB Matematik Ders Kitabı / 2001 / Erol BAKŞI – Hasan KORKMAZ – Uğur ADALIOĞLU

Sayfa 59 / ... Aralığının uç noktalarındaki limiti

A. $f: [a, b] \mapsto \mathbb{R}, y = f(x)$ fonksiyonunun tanım aralığının uç noktalarındaki limiti araştırılırken:

i. a noktasında limit, sadece sağdan limitle belirlenir.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

ii. b noktasındaki limit, sadece soldan limitle belirlenir.

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$$

B. $f: (a, b) \mapsto \mathbb{R}, y = f(x)$ fonksiyonunun tanım aralığının uç noktalarındaki limiti araştırılırken:

i. a noktasında limit, sadece sağdan limitle belirlenir.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

ii. b noktasındaki limit, sadece soldan limitle belirlenir.

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$$

Ve böylece tartışmaya son nokta açıkça konulmuş oluyor. Fakat kitapta sınır değerle ilgili hala örnek verilmemesi bu da mı sorusunu doğal olarak aklımıza getiriyor.

Şimdi girişte sorduğumuz soruların bazılarının çözümlerini veriyoruz. Çözümünü vermediğimiz soruların yorumlarını size bırakıyoruz.

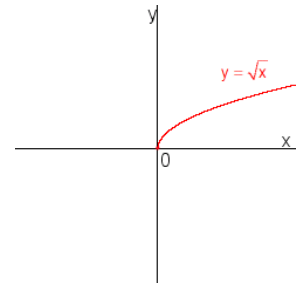
Soru 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x}$ değeri için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- A) $-\infty$ B) 0 C) 1 D) $+\infty$ E) Yoktur

Görüş 1: $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonu için $x = 0$ kritik noktadır. Kritik noktalarda bir fonksiyonun limitinin olması için sağ limit ile sol limit eşit olmalıdır. Sağ limit sıfırdır. $x < 0$ için fonksiyon tanımlı olmadığından sol limitten bahsedilemez.

Görüş 2: Fonksiyonun tanım kümesinden dolayı sadece sağ limit vardır ve sıfırdır.

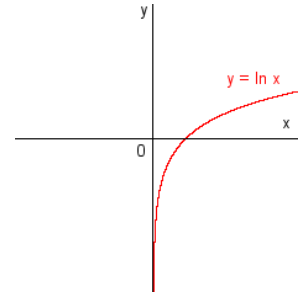
Kompleks fonksiyonlarda limit, üçüncü görüş olarak Cege zümresinde gündeme gelmiştir fakat müfredatımızın dışında olduğu için bu konuya değinmedik.



Soru 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x$ değeri için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- A) $-\infty$ B) 0 C) 1 D) $+\infty$ E) Yoktur

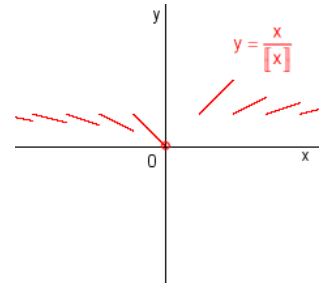
Çözüm: 0 (sıfır), fonksiyonun tanım kümesine dahil değildir. Sağ limit $-\infty$ fakat sol limit yoktur.



Soru 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$ değeri için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

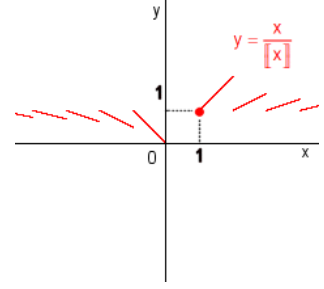
- A) $-\infty$ B) 0 C) 1 D) $+\infty$ E) Yoktur

Çözüm: Sıfır, fonksiyonun tanım kümesine dahil değildir. Sağ limit yok fakat sol limit sıfırdır.



Soru 4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{\|x\|}$ değeri için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- A) $-\infty$ B) 0 C) 1 D) $+\infty$ E) Yoktur

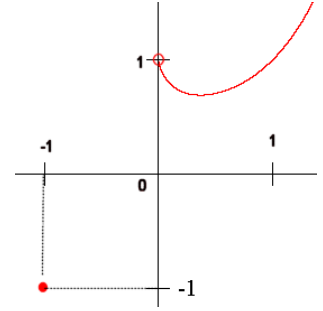


Çözüm: 1 fonksiyonun tanım kümesine dahildir. Sol limit yok, sağ limit 1 dir.

Soru 5. $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$ değeri için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- A) $-\infty$ B) 0 C) 1 D) $+\infty$ E) Yoktur

Çözüm: 0 fonksiyonun tanım kümesine dahil değildir. Sağ limit 1, sol limit yoktur.

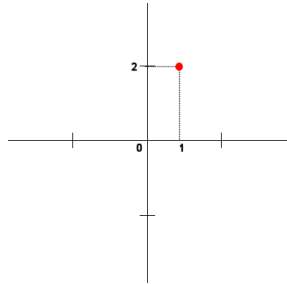


Soru 6. $f: \mathbb{Z}^- \cup \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ olmak üzere, $f(x) = x^x$ fonksiyonu veriliyor. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ değeri için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- A) $-\infty$ B) 0 C) -1 D) $+\infty$ E) Yoktur

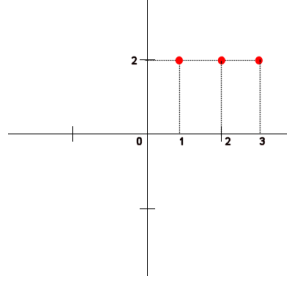
Soru 7. $f: \{1\} \mapsto \{2\}$ olmak üzere bir $y = f(x)$ fonksiyonu veriliyor. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ değeri için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) $+\infty$ E) Yoktur



Soru 8. $f: \{1, 2, 3\} \mapsto \{2\}$ olmak üzere bir $y = f(x)$ fonksiyonu veriliyor.
 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ değeri için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Yoktur



Soru 9. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathcal{Q} \\ 1, & x \in \mathcal{Q}' \end{cases}$

şeklinde tanımlanan bir f fonksiyonun $x = 0$ noktasında limiti nedir?

- A) $-\infty$ B) 0 C) 1 D) $+\infty$ E) Yoktur

Soru 10 $f: [0, 1] \mapsto \mathbb{R}, f(x) = \|x\|$ fonksiyonu veriliyor.

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ değeri kaçtır?

- A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) Yoktur

Gökhan Demir, Oktay Aykan ve Harun Kan hocalarımıza katkılarından dolayı teşekkür ederiz.

www.matematik.kulubu.com