

İKİNCİ DERECEDEDEN DENKLEMLER (L. Gökçe)

İkinci Dereceden Denklem:

a, b, c gerçel sayılar ve $a \neq 0$ olmak üzere

$$ax^2 + bx + c = 0$$

türündeki denklemlere *ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem* denir.

Denklemi sağlayan x değerine *denklemin çözümü*, *denklemin kökü* veya *denklemin sıfırı* denir. Bu sayfada biz *denklemin kökü* terimini tercih edeceğiz.

1. Aşağıdaki denklemleri \mathbb{R} 'de çarpanlara ayırma yöntemiyle çözümlü.

a) $2x^2 - 3x - 35 = 0$

b) $4x^2 + 12x + 9 = 0$

NOT: Tam kare olan ikinci dereceden denklemlerin çözüm kümesi bir elemanlıdır.

2. Aşağıdaki denklemleri \mathbb{R} 'de tam kareye tamamlama yöntemiyle çözümlü.

a) $x^2 - 6x + 1 = 0$

b) $x^2 + 8x + 2 = 0$

c) $x^2 - 4x + 13 = 0$

Diskriminant:

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde $\Delta = b^2 - 4ac$ değerine *diskriminant* denir.

- $\Delta > 0$ ise $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ farklı kökleri vardır.
- $\Delta = 0$ ise $x_1 = x_2 \in \mathbb{R}$ tek kök vardır. Bunlara *çakışık kökler* veya *katlı kökler* denir. Bu durumda denklem tam karedir.
- $\Delta < 0$ ise $x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$ dir. Karmaşık sayı kökleri vardır.

3. a ve b pozitif tam sayılar olmak üzere $ax^2 + bx - 1 = 0$ denkleminin diskriminantı 16 olduğuna göre $a + b$ kaçtır?

4. b bir pozitif tam sayı olmak üzere $2x^2 + bx + 3 = 0$ denkleminin gerçel kökü vardır. b 'nin alabileceği en küçük değer kaçtır?

5. $3x^2 + 8x + c = 0$ denkleminin gerçel kökü yoktur. c 'nin alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?

Diskriminant Yardımıyla Denklem Çözümü:

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

formülüyle bulunabilir.

5. Aşağıdaki denklemleri \mathbb{R} 'de diskriminant yöntemiyle çözünüz.

a) $x^2 + 5x + 2 = 0$

b) $2x^2 - 4x + 3 = 0$

c) $2x^2 - 5x + 1 = 0$

Simetrik Kök:

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri arasında

$$x_1 = -x_2$$

ilişkisi varsa bu köklere *simetrik kökler* denir.

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin simetrik kökleri olması için $b = 0$ olmalıdır.

6. $(m-2)x^2 + (m^2-4)x + 9 = 0$ denkleminin simetrik iki kökü olduğuna göre pozitif kök kaçtır?

Kök – Katsayı Bağlılıkları:

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olsun.

- Kökler toplamı, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
- Kökler çarpımı, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$
- Kökler farkı, $|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

formülleriyle bulunabilir.

7. $x^2 - 7x + c = 0$ denkleminin köklerinin farkı 1'dir. Buna göre c kaçtır?

8. $2x^2 + bx + 6 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 'dir. $x_1^2 \cdot x_2 = 12$ ise b kaçtır?

9. $x^2 + 4x - 2 = 0$ denkleminin kökleri x_1 , x_2 'dir. Buna göre $x_1^2 + 6x_1 + 2x_2$ ifadesinin değeri kaçtır?

10. $3x^2 - 5x + 2 = 0$ denkleminin kökleri m , n olduğuna göre $(m-4)(n-4)$ ifadesinin değeri kaçtır?

11. $2x^2 + 3x - 4 = 0$ denkleminin kökleri x_1 , x_2 'dir. Aşağıdaki ifadelerin değerini hesaplayınız:

a) $\frac{6}{x_1} + \frac{6}{x_2}$ b) $x_1^2 + x_2^2$ c) $x_1^3 + x_2^3$

Kökleri Verilen İkinci Dereceden Denklemin Yazılması:

Kökleri x_1, x_2 olarak verilen ikinci dereceden denklemin $x^2 + bx + c = 0$ olduğunu varsayalım. Buna göre $b = -(x_1 + x_2)$ ve $c = x_1 \cdot x_2$ olup

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

denklemini elde edilir.

12. Kökleri $4 \mp 3\sqrt{2}$ olan ikinci dereceden denklemini yazınız.

13. Köklerinden biri $\frac{3 + \sqrt{7}}{2}$ olan rasyonel katsayılı ikinci dereceden denklemini yazınız.

14. $x^2 - 3x + 5 = 0$ denkleminin kökleri x_1, x_2 'dir. Kökleri $x_1 + 2, x_2 + 2$ olan ikinci dereceden denklemini bulunuz.

İkinci Dereceye Dönüştürülebilen Denklemler:

15. $(x^2 - 2x)^2 - 11(x^2 - 2x) + 24 = 0$ denkleminin en büyük kökü ile en küçük kökünün toplamı kaçtır?

16. $\sqrt{4x+1} = 2x-1$ denkleminin \mathbb{R} 'de çözüm kümesini bulunuz.

Çeşitli Sorular:

1. $x^2 - ax + 16 = 0$ denkleminin kökleri x_1, x_2 'dir.

$$\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \sqrt{x_2} = 5$$

olduğuna göre a kaçtır? (2008 ÖSS)

2. $x^2 - 2x - 4 = 0$ denkleminin kökleri m_1, m_2 'dir.

Kökleri $\frac{1}{m_1}$ ve $\frac{1}{m_2}$ olan ikinci dereceden denklem nedir? (2009 ÖSS)

3. İki gerçel kökü olan $x^2 - ax + 1 = 0$ denkleminin kökler toplamı, $x^2 + 6x + a = 0$ denkleminin bir kökü olduğuna göre a kaçtır? (2017 LYS)

4. m, n sıfırdan ve birbirinden farklı iki gerçel sayı olmak üzere $x^2 + (m+1)x + n - m = 0$ denkleminin köklerinden biri $m - n$ sayısıdır. Buna göre m/n oranı kaçtır? (2018 AYT)

5. $x^2 - 5x + n = 0$ ve $x^2 + x - 2n = 0$ denklemlerinin birer kökü ortak olduğuna göre n 'nin pozitif değeri kaçtır?

6. $x^2 - 3x - 2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$ denkleminin gerçel köklerinin toplamı kaçtır?